

دنباله هندسی

به نام خدا

در جلسه قبل با دنباله حسابی آشنا شدیم و دیدیم که در این دنباله:

هر جمله از جمع جمله قبلیش با قدرنسبت به دست میاد.

در اینجا میفوییم دنباله هندسی رو معرفی کنیم.

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

به توجه به تعریف بالا، در دنباله هندسی:

هر جمله از ضرب جمله قبلیش با قدرنسبت به دست میاد.

پس ما آگه جمله اول دنباله رو با t_1 ، نشون بدیم، جمله دوم چطوری به دست میاد؟

از ضرب قدرنسبت در جمله اول (قدرنسبت رو با r نشون میدیم). پس داریم:

$$t_2 = t_1 r$$

جمله سوم چطوری به دست میاد؟

از ضرب جمله دوم در قدرنسبت

$$t_3 = t_2 r = t_1 r r = t_1 r^2$$

جمله چهارم چطوری به دست میاد؟

از ضرب جمله سوم در قدرنسبت

$$t_4 = t_3 r = t_1 r^2 r = t_1 r^3$$

جمله پنجم بطوری به دست میاد؟

از ضرب جمله چهارم در قدرنسبت

$$t_5 = t_4 r = t_1 r^3 r = t_1 r^4$$

یه بار دیگه جملات اول تا پنجم رو مینویسیم تا بتونیم با استفاده از اونها جمله عمومی رو حدس بزنیم:

$$t_2 = t_1 r^1$$

$$t_3 = t_1 r^2$$

$$t_4 = t_1 r^3$$

$$t_5 = t_1 r^4$$

چه ارتباطی بین اندیس t و توان r وجود داره؟

توان r از اندیس t یکی کمتره. بنابراین جمله عمومی یعنی جمله شماره n در یک دنباله هندسی، از طریق زیر به دست میاد:

$$t_n = t_1 r^{(n-1)}$$

*نکته ای که باید بهش توجه کنیم اینه که در دنباله هندسی، جمله اول و قدرنسبت مخالف صفر هستن.

بنابراین:

جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می باشد ($t_1, r \neq 0$).

اگر جملات y دنباله هندسی رو داشتیم، قدر نسبتش رو بطوری به دست میاریم؟
 هر جمله y دلفواه رو بر جمله قبلیش تقسیم می‌کنیم، عددی که به دست میاد نشون‌دهنده
 قدر نسبته.

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید.
 سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) a_1 ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, \square , \square , ..., $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) ۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, \square , \square , ..., $b_n =$

پ) ۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \square , \square , ..., $c_n =$

ت) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{2}$, \square , \square , ..., $d_n =$

در دنباله هندسی هم با داشتن جمله اول و قدر نسبت می‌تونیم جمله عمومی رو
 بنویسیم:

قسمت ب:

جمله اول رو داریم که برابر ۵ هست. یعنی: $t_1 = 5$

گفتیم برای به دست آوردن قدر نسبت، به جمله رو بر جمله قبلیش تقسیم می‌کنیم:

$$r = \frac{10}{5} = 2$$

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 r^{(n-1)}$$

مقادیر به دست اومده برای t_1 و r رو جاگذاری می‌کنیم، داریم:

$$t_n = 5(2)^{(n-1)}$$

قسمت پ :

جمله اول رو داریم که برابر ۶ هست. یعنی : $t_1 = 6$

گفتیم برای به دست آوردن قدرنسبت، به جمله رو بر جمله قبش تقسیم می‌کنیم:

$$r = \frac{-60}{6} = -10$$

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 r^{(n-1)}$$

مقادیر به دست اومده برای t_1 و r رو جاگذاری می‌کنیم، داریم:

$$t_n = 6(-10)^{(n-1)}$$

قسمت ت :

جمله اول رو داریم که برابر ۴ هست. یعنی : $t_1 = 4$

گفتیم برای به دست آوردن قدرنسبت، به جمله رو بر جمله قبش تقسیم می‌کنیم:

$$r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 r^{(n-1)}$$

مقادیر به دست اومده برای t_1 و r رو جاگذاری می‌کنیم، داریم:

$$t_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$$

۳ الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

ما سوال رو به این صورت حل می‌کنیم:

بین ۳ و ۴۸ چه عددی را میتوان قرار داد که این سه عدد با هم تشکیل دنباله هندسی بدهند.

بین ۳ و ۴۸ باید چه عددی درج کنیم ولی نمی‌دونیم چه عددی، بنابراین:

$$3 \quad \square \quad 48$$

شماره جملات به صورت زیر همیشه:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & \square & 48 \end{matrix}$$

پس جمله اول برابر ۳ و جمله سوم برابر ۴۸ هست. یعنی:

$$t_1 = 3$$

$$t_3 = 48$$

ما می‌دونیم که جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 r^{(n-1)}$$

پس جمله سوم به دنباله هندسی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$t_3 = t_1 r^2$$

در این سوال ما t_1 و t_3 رو داریم، پس در فرمول قبل جاگذاری می‌کنیم:

$$48 = 3r^2$$

معادله رو حل می‌کنیم تا r به دست بیاد:

$$r^2 = 16 \rightarrow r = \pm 4$$

دو تا عدد رو به عنوان قدرنسبت به دست آوردیم، یعنی ما دو تا جمله عمومی می‌تونیم بنویسیم که در اون با قرار دادن یه عدد بین ۳ و ۴۸ دنباله هندسی تولید بشه:

$$t_n = 3(4)^{(n-1)}$$

$$t_n = 3(-4)^{(n-1)}$$

جمله عمومی رو به دست آوردیم، حالا می‌فوییم ببینیم جمله‌ی دوم که بین ۳ و ۴۸ قرار میگیره چه عددیه، برای به دست آوردن اون عدد ۲ تا راه داریم:

۱. جمله اول رو در قدرنسبت ضرب کنیم تا جمله دوم به دست بیاد:

$$t_2 = 3 \times 4 = 12$$

برای جمله عمومی دوم هم همین کار رو انجام میدیم:

$$t_2 = 3(-4) = -12$$

۲. توی جمله عمومی به جای n قرار بدیم ۲، تا جمله دوم به دست بیاد:

$$t_2 = 3(4)^{(2-1)} = 12$$

$$t_2 = 3(-4)^{(2-1)} = -12$$

بنابراین ما بین ۳ و ۴۸ می‌تونیم ۱۲ یا ۱۲- رو قرار بدیم تا یک دنباله هندسی داشته باشیم:

۳ ، ۱۲ ، ۴۸

۳ ، -۱۲ ، ۴۸

یه مثال دیگه با هم ببینیم:

بین ۴ و ۹۷۲، چهار واسطه هندسی درج کنید:

بین ۴ و ۹۷۲ باید چهار تا عدد درج کنیم ولی نمی‌دونیم چه اعدادی، بنابراین:

۴ □ □ □ □ ۹۷۲

شماره جملات به صورت زیر همیشه:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶
۴ □ □ □ □ ۹۷۲

پس جمله اول برابر ۴ و جمله ششم برابر ۹۷۲ هست. یعنی:

$$t_1 = 4$$

$$t_6 = 972$$

ما می‌دونیم که جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 r^{(n-1)}$$

پس جمله ششم یه دنباله هندسی از فرمول زیر به دست میاد:

$$t_6 = t_1 r^5$$

در این سوال ما t_1 و t_6 رو داریم، پس در فرمول قبل جاگذاری می‌کنیم:

$$972 = 3r^5$$

معادله رو حل می‌کنیم تا r به دست بیاد:

$$r^5 = 243 \rightarrow r = 3$$

قدر نسبت رو به دست آوریم، بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر می‌شود:

$$t_n = 4(3)^{(n-1)}$$

جمله عمومی هم به دست آورد ، حالا می‌فوییم جمله‌های دوم ، سوم ، چهارم و پنجم رو به دست بیاریم. برای به دست آوردن این اعداد ۲ تا راه داریم:

۱. جمله اول رو در قدر نسبت ضرب کنیم تا جمله دوم به دست بیاد:

$$t_2 = 3 \times 4 = 12$$

برای جمله عمومی دوم هم همین کار رو انجام میدیم:

$$t_2 = 3(-4) = -12$$

۲. توی جمله عمومی به جای n قرار میدیم ۲ ، تا جمله دوم به دست بیاد:

$$t_2 = 3(4)^{(2-1)} = 12$$

$$t_2 = 3(-4)^{(2-1)} = -12$$

بنابراین ما بین ۳ و ۴ می‌تونیم ۱۲ یا ۱۲- رو قرار بدیم تا یک دنباله هندسی داشته باشیم:

حل تمرین صفحه ۲۷

دنباله هندسی

تمرین

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, ...

ب) $۱, \frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{-۱}{۸}, \dots$

ب) $۲\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}, ۶\sqrt{۵}, ۸\sqrt{۵}, \dots$

ت) ۵, ۵, ۵, ۵, ...

برای اینکه یه دنباله هندسی باشه باید قدرنسبت جملاتش با هم برابر باشه. برای اینکه بفهمیم برابر هست یا نه، هر جمله رو بر جمله قبلیش تقسیم می‌کنیم، اگه این نتیجه برای همه یکسان شد می‌فهمیم دنباله هندسیه و عددی که به دست اومده قدرنسبتشه.

الف:

$$\frac{28}{7} = 4$$

$$\frac{112}{28} = 4$$

$$\frac{448}{112} = 4$$

این دنباله هندسیه و قدرنسبتش برابر ۴ هشت.

ب:

$$\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{6}{4}$$

با هم برابر نیستن بنابراین این دنباله یک دنباله هندسی نیست.

پ:

$$\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{-1}{2}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-1}{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

این دنباله هم به دنباله هندسی با قدرنسبت $-\frac{1}{2}$ هست.

ت: جملات این دنباله ثابت، بنابراین این دنباله به دنباله هندسی با قدرنسبت ۱ هست.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam10tr

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.